数理解析研究所講究録
1049 巻 1998 年 47-55

概周期関数の拡張と Hardy 空間

都留文科大学　田中純一　(Jun-ichi Tanaka)

§1. 序.

A. Beurling [2] による $H^2(d\theta/2\pi)$ での不変部分空間の特徴付けは, $(1-\lambda z)^{-1}$, $(|\lambda| \leq 1)$ を含まない不変部分空間が多数存在することを示している. いま $\mathbf{N}_0$を 0 と自然数のなす加法に関する半群とする. このとき Fourier 変換を考えると, 適当な $f \in \ell^2(\mathbf{N}_0)$ を定めれば, $\{T_n f(x) = f(x+n); n \in \mathbf{N}_0\}$ で生成される $\ell^2(\mathbf{N}_0)$ の閉部分空間は $\mathbf{N}_0$の指標 λ^nを含み得ないことを示している. このような関係を $(0,1]$ の乗法についての半群について, より弱い位相での状況を探っていくと意外な応用を生む.

複素数列 $\{a_n\}$ を定めて得られる級数,

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \tag{1.1}$$

を Dirichlet 級数と呼ぶ. そしてこれはある右半平面 $\sigma > \sigma_0$ で収束しその上で解析的な関数となる.　これらの中で最も重要な例は a_n をすべて 1 として得られる Riemann のゼータ関数,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\,;\,prime} (1 - \frac{1}{p^s})^{-1}, \quad \sigma > 1,$$

であろう. 素因数分解の一意性から得られる上式の無限乗積を Euler 積と呼ぶ. $\zeta(s)$ は $s = 1$ を除いて全平面に解析接続され, $s = 1$ で留数 1 の極を持つ. そして帯状領域 $0 < \sigma < 1$ にある $\zeta(s)$ の零点はすべて $\sigma = 1/2$ という直線上にあるであろう, というのが有名な Riemann 予想である. この Riemann 予想の言い換えが上で触れた不変部分空間の性質から可能となる.

いま $\rho(x) = x - [x]$ で $x \in \mathbf{R}$ の分数部分をあらわそう. そして C を

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \rho(\frac{\theta_\nu}{x}), \quad 0 < \theta_\nu \leq 1, \quad \nu = 1, 2, \cdots, n,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \theta_\nu = 0$$

をみたす関数 f で生成される $L^p(0,1)$ の部分空間とする.

定理 1.1 (Beurling [3]). Riemann のゼータ 関数 $\zeta(s)$ が $\sigma > 1/p$, $1 \leq p < \infty$, で零点を持たないための必要十分条件は C が $L^p(0,1)$ で稠密となることである.

もちろん, Hardy の定理 ([10: 10.2]) によって, $\zeta(s)$ は $\sigma = 1/2$ に多数の零点を持つことが知られているから, $1 \leq p \leq 2$ のときが興味のある場合となる. この定理に関して, 1980 年代に, 別証明と言い換えが Bercovici-Foias [1] によってなされ, さらに数年前 Nikolski [5] により不変部分空間とある種の距離関数の関係から $\zeta(s)$ が零点を持たない範囲を特定するという精密化が出されている. 証明の大体の流れは Cに属する関数を Mellin 変換（乗法群 $(0,\infty)$ の Fourier 変換）によって半平面上の Hardy 空間 $H^p(dt/\pi(1+t^2))$ に移し, それらの生成する不変部分空間を吟味して対応する内部関数の零点の有無を判定するといった内容である.

§2. Dirichlet 級数の Bohr 群上の解析関数への拡張.

実数 $\mathbf{R}$ 上の関数 $g(t)$ が, ある実数列 $\{\lambda_j\}$ に対して,

$$g(t) = \sum_j c_j e^{i\lambda_j t}, \quad t \in \mathbf{R},$$

と表せるとき概周期性を持つと呼ぼう. このような関数は右辺の級数の適当な収束条件の下で $\{\lambda_j\}$ から生成される離散群のコンパクトな双対群の上へと拡張される. そして $e^{i\lambda t}$ の拡張された関数 (指標) を変換から定まる固有関数とみなして変換を特徴ずけたのが von-Neumann の離散スペクトル定理である. ([4] 等参照). 特に $\lambda_j \geq 0$ と制限したときえられる上半平面 $\mathbf{R}^2_+$ における解析関数を拡張して得られる関数が Bohr 群上の解析関数となる.

$$\frac{1}{n^s} = \frac{1}{n^\sigma} e^{-it(\log n)}, \qquad s = \sigma + it$$

より Dirichlet 級数 $f(s)$ に対し $t \longrightarrow f(\sigma - it)$ は解析的な概周期関数と考えられる.

Γ を $\mathbf{R}$ の稠密な部分群とし離散位相を与える. Γ の双対群を K とし σ をその上の正規 Haar 測度とする. $\lambda \in \Gamma$ を K 上の指標 (即ち 連続な K から $\mathbf{T}$ への準同形写像) とみなすとき, $\chi_\lambda(x)$ と書く. $\mathbf{R}$ から Γ に自然に導入される順序を用い, 解析関数を次のように定義する. $f \in L^1(\sigma)$ が解析的とは

$$f(x) \sim \sum_{0 \leq \lambda \in \Gamma} a_\lambda \chi_\lambda(x)$$

という Fourier 展開を持つこととする. そして $L^p(\sigma), 1 \leq p \leq \infty$, における解析関数の全体 $H^p(\sigma)$ を K 上の Hardy 空間と呼ぶ. また連続な解析関数からなる関数環を $A(K)$ とおくと, $A(K)$ は K 上の Dirichlet 環となり σ はその上の表現測度となる.

K 上の流れについて考えよう．任意の $t \in \mathbf{R}$ に対し $\lambda \longrightarrow e^{i\lambda t}$ は Γ 上の指標となる．したがって $e_t \in K$ が定まり，$e_t(\lambda) = e^{i\lambda t}, \lambda \in \Gamma$，をみたす．このとき $\{e_t; t \in \mathbf{R}\}$ は K における稠密な部分群を形成する．いま K 上の位相同形の作る 1-助変数変換群 $\{T_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ を

$$T_t x = x + e_t, \quad x \in K,$$

とすると流れ $(K, \{T_t\}_{t\in\mathbf{R}})$ は σ を唯一の不変確率測度とする強エルゴード的な流れとなる．そしておのおのの軌道には 部分群 $\{e_t; t \in \mathbf{R}\}$ の剰余類が対応してくる．混乱の恐れがないとき $T_t x$ を $x + t$ と略記する．この流れを用いると，$f \in L^p(\sigma)$ が解析的となる必要十分条件は，$a.e. \, x \in K$ に対して，$t \longrightarrow f(x+t) \in H^p(dt/\pi(1+t^2))$ となることが分かる．ここで後に用いる $H^2(\sigma)$ の外部関数の一つの特徴付けを述べよう．

補題 2.1. h が $H^2(\sigma)$ の外部関数となる必要十分条件は，$\hat{h}(\sigma) \neq 0$ となり，また $a.e. \, x \in K$ に対して $t \longrightarrow h(x+t)$ が $H^2(dt/\pi(1+t^2))$ の外部関数となることである．

(証明の概略.) $A(K) \cdot h$ が $H^2(\sigma)$ で稠密でないなら，ある定数でない $g \in H^2(\sigma)$ が $A(K) \cdot h$ に直交する．このとき $t \longrightarrow \overline{g(x+t)} \cdot h(x+t) \in H^2(dt/\pi(1+t^2))$ となり，$t \longrightarrow h(x+t)$ は $H^2(dt/\pi(1+t^2))$ の外部関数となりえない．

逆に，

$$\log |h * P_{ir}(x)| < \int_{-\infty}^{\infty} \log |h(x+t)| P_{ir}(t) \, dt,$$

が正の測度をもつ集合上で成り立つとする，ここでの $P_{ir}(t)$ は ir における Poisson 核を表す．このとき $h * P_{ir}(x)$ は $H^2(\sigma)$ に属するので，Jensen の不等式から，

$$\log \left| \int_K h * P_{ir}(x) \, d\sigma(x) \right| \leq \int_K \log | h * P_{ir}(x) | \, d\sigma(x)$$

となり，結局

$$\log |\hat{h}(\sigma)| < \int_K \log |h| \, d\sigma(x)$$

から h は $H^2(\sigma)$ の外部関数になり得ない．**(終わり.)**

任意の $f \in C(K)$ は Stone-Weierstrass の定理から三角多項式の一様極限として表せる．いま $f \sim \sum_n a_n \chi_{\lambda_n}$ を f の Fourier 展開とする．一つの $x \in K$ を定め，$F_x(t) = f(x + e_t)$ とすると $F_x(t)$ は振動数 (frequency) が Γ に属する $\mathbf{R}$ 上の (Bohr の意味での) 概周期関数，

$$F_x(t) = \sum_n a_n \chi_{\lambda_n}(x) e^{i\lambda_n t}$$

となる．これらの概周期関数の族 $\{F_x(t); x \in K\}$ は $F_0(t) = \sum_n a_n e^{i\lambda_n t}$ から出発し平行移動を繰り返し，その極限として得られる関数の全体と考えられる．そしてそれらのいず

れかを取り K へ拡張したものが f となる. このような捉え方は測度零という例外を許せば $L^p(\sigma)$ に属する関数にも可能で, Γ の可算性を仮定し, $L^2(\sigma)$ に適用すれば Besicovitch の意味での概周期関数の K への拡張となる.

Γ が $\mathbf{R}$ の可算部分群となるとき, K は単位円周 $\mathbf{T}$ の可算個の直積 $\mathbf{T}^\omega$ の閉部分群となる. Dirichlet 級数の拡張への準備として, ここで Γ と K の特殊な具体例を与えておく.

例. $\mathbf{Z}^\infty$ で整数全体の作る群 $\mathbf{Z}$ の可算個の直和, 即ち有限個を除いて他は零となる整数列の全体とする. 添え字として素数 p を用い, $\mathbf{Z}_p = \mathbf{Z}$ とし

$$\mathbf{Z}^\infty = \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_3 \oplus \mathbf{Z}_5 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_p \oplus \cdots ,$$

と書くこととする. このとき $\mathbf{Z}^\infty$ から $\mathbf{R}$ の中への同形写像

$$\tau(\{n_p\}) = \sum_{p\,;\,prime} n_p \log p, \quad \{n_p\} \in \mathbf{Z}^\infty ,$$

とすると, $\tau(\mathbf{Z}^\infty)$ は $\mathbf{R}$ の稠密な部分群 $\Gamma = \{\log r\,;\, r \text{ は正の有理数}\}$ となる. Γ の双対群 K は $\langle \tau^*(x), \{n_p\}\rangle = \langle x, \tau(\{n_p\})\rangle$ によって定まる同形写像 τ^* で無限次元トーラス $\mathbf{T}^\omega$ と同形となる. 先と同様に添え字を素数 p として, $\mathbf{T}_p = \mathbf{T}$ とし

$$\mathbf{T}^\omega = \mathbf{T}_2 \otimes \mathbf{T}_3 \otimes \mathbf{T}_5 \otimes \cdots \otimes \mathbf{T}_p \otimes \cdots ,$$

と書く. 先の議論から $\mathbf{T}^\omega$ 上に定義される流れは, $e_t(\log p) = e^{it\log p}$, となることから

$$T_t(\{e^{i\theta_p}\}) = \{e^{i(\theta_p + t\log p)}\}, \qquad \{e^{i\theta_p}\} \in \mathbf{T}^\omega ,$$

によって与えられる. また $\mathbf{T}^\omega$ 上の正規 Haar 測度 σ_P は無限積測度

$$\sigma_P = \prod_{p\,;\,prime} \frac{1}{2\pi}\, d\theta_p$$

となる. 通常 K と $\mathbf{T}^\omega$ を同一視する.

§3. Riemann のゼータ関数の拡張と Euler 積を持つ Dirichlet 級数.

さて (1.1) において $\{a_n\}$ の有界性と $a_n \cdot a_m = a_{mn}$ を仮定すると, それはまた

$$f(s) = \prod_{p\,;\,prime} (1 - \frac{a_p}{p^s})^{-1}, \quad \sigma > 1 \tag{3.1}$$

という Euler 積で表現できる．とくに $|a_n| = 1$ となるときは $\zeta(s)$ と強い相関を持ち，$\zeta(s)$ を平行移動したもののある種の極限として導かれ，またそのような関数の同様な極限の中に $\zeta(s)$ が現れてくる．前節の例で扱った $\mathbf{T}^\omega$ 上の流れを用い $\zeta(s)$ をこの上の関数に拡張してみよう．

まず $u > 1/2$ を固定する．このとき

$$\zeta(u+it) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^u} \cdot e^{-it\log n}$$

と書き変えれば $t \longrightarrow \zeta(u-it)$ は $\mathbf{R}$ 上の (解析的) 概周期関数と見なせ $\mathbf{T}^\omega$ 上へ拡張できる．実際，

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n^u})^2 < \infty$$

より

$$Z_u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^u} \cdot \chi_{\log n}(x)\,, \qquad x \in \mathbf{T}^\omega\,,$$

とおくと，この関数は前節で定義した $\mathbf{T}^\omega$ 上の $H^2(\sigma_P)$ に属し，これをを 0 の軌道 $\{e_t\,;\, t \in \mathbf{R}\}$ に制限し上半平面に拡張して $\{Im\, z > 1/2\}$ での状況を考えるとよい．いま

$$\begin{aligned} Z_u(e_z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^u} \cdot \chi_{\log n}(e_z) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^u} \cdot e^{i(\log n)z} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^u} \cdot \frac{1}{n^{-iz}}\,, \end{aligned}$$

より $z = is$ (右半平面を 90° 回転) とすると $Z_u(e_z)$ は $\zeta(s+u)$ を上半平面で表した形となっている．したがって $Z_u(x)$ は $\zeta(s)$ の $\mathbf{T}^\omega$ への拡張となっていて $z \longrightarrow Z_u(x+z)\,, Im\, z > 0\,,$ は $\zeta(s)$ のもつ概周期性からそれ自身とかなり類似性の高い関数と見なせる．とくに $Im\, z > 1/2$ のときは $\mathbf{T}^\omega$ 上の連続関数と考えられるから，エルゴード論的には $\zeta(s)$ と同一な関数と考えて良い．

補題 3.1. いま $u > 1/2$ とする．このとき 上で定義された $Z_u(x)$ は $H^2(\sigma_P)$ における外部関数となる．

(証明の概略.) $\sigma > 1$ とするとき $\mu(n)$ を Möbius 関数とすれば，

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}\,, \tag{3.2}$$

と表せる, ただし Möbius 関数 $\mu(n)$ は次のように定義される：

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^n & (n \text{ が相異なる } k \text{ 個の素数の積のとき}) \\ 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

これより

$$Z_u(x)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^u} \cdot \chi_{\log n}(x), \qquad x \in \mathbf{T}^{\omega},$$

とすると, $Z_u(x)^{-1} \in H^2(\sigma_P)$ となる. そして $Z_u(x) \cdot Z_u(x)^{-1} = 1$ が簡単に確かめられ $H^{\infty}(\sigma_P) \cdot Z_u(x)$ が $H^2(\sigma_P)$ で稠密となる. **(終わり.)**

この補題 3.1 と補題 2.1 を合わせると, $a.e.\, x \in \mathbf{T}^{\omega}$ に対して $z \longrightarrow Z_u(x+z)$ は $H^2(dt/\pi(1+t^2))$ の外部関数となり零点を持たない. そして 0 の軌道は上述のように $\zeta(s)$ を表現するが $s = 1$ で極を持つことから $H^2(dt/\pi(1+t^2))$ に属せず補題 2.1 で測度零として除外される部分となる.

ここでもう少し詳しく $Z_u(x)$ を調べてみよう.

$$\begin{aligned} Z_u(x+z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^u} \cdot \chi_{\log n}(x + e_z) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^u} \cdot \chi_{\log n}(x) \cdot e^{i(\log n)z} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{u-iz}}, \end{aligned}$$

ただし $a_n = \chi_{\log n}(x)$ とする. このとき指標の性質より数列 $\{a_n\}$ は $|a_n| = 1$ および $a_m \cdot a_n = a_{mn}$ をみたし, いま $n = p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdots p_l^{b_l}$ を n の素因数分解とすれば,

$$a_n = a_{p_1}^{b_1} \cdot a_{p_2}^{b_2} \cdots a_{p_l}^{b_l} \tag{3.3}$$

によって決まってくる. 逆におのおのの $x = \{a_p\} \in \mathbf{T}^{\infty}$ に対して, (3.3) によって $\chi_{\log n}(x)$ が定まってくる. 以上を Euler 積を持つ Dirichlet 級数に対して言い換えると, 次の定理を得る.

定理 3.2. $a.e.\, \{a_p\} \in \mathbf{T}^{\omega}$ に対し a_n を (3.3) で定める. このとき $\sigma > 1$ で絶対収束する Dirichlet 級数,

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \prod_{p\,;\,prime} (1 - \frac{a_p}{p^s})^{-1}, \quad s = \sigma + it, \tag{3.4}$$

は $\sigma > 1/2$ まで解析的に拡張され零点を持たない.

証明を少し変更れば $|a_p| \leq 1$ の場合にも適用できるから, ほぼ同様の主張が $Z_u(x)^{-1}$ についても成り立ってくる. ただ奇妙なのは具体的に $\{a_p\} \in \mathbf{T}^\omega$ を定めたとき, (3.4) による f が定理 3.2 の結論をみたす場合かどうか判定できないことである.

最後に Dirichlet 級数の収束と Hardy 空間の関係について触れておこう. $f(s)$ を (1.1) で表示される Dirichlet 級数とする. このとき一般論 [9: 9.14] より

$$F(\lambda) = \sum_{\log n \leq \lambda} a_n$$

とおいて、$F(\log n) = O(n^u)$ をみたせば, $\sigma > u$ という半平面で収束することが示される.

補題 3.3. $f(s)$, $s = \sigma + it$, を (1.1) で表示される Dirichlet 級数とし, $\sigma > \sigma_0\,(\geq 0)$ まで解析的に拡張されるとする. いま $2 < r$ に対して,

$$t \longrightarrow f(\sigma_0 - it) \in H^r(dt/\pi(1+t^2))$$

となるなら, $f(s)$ は $\sigma > \sigma_0 + 1/r$ で収束する.

(**証明の概略**.) $2 \leq q < r$ となる任意の q に対して, $1/q + 1/p = 1$ となる p を定める.

$$|\sigma + it|^p = |\sigma + it|^{\frac{2p}{r}} \cdot |\sigma + it|^{p(1-\frac{2}{r})},$$

より Hölder の不等式から

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\frac{f(\sigma+it)}{\sigma+it}|^p \leq \{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(\sigma+it)|^r}{|\sigma+it|^2}\,dt\}^{p/r} \cdot \{\int_{-\infty}^{\infty} |\sigma+it|^{-\frac{p(r-2)}{r-p}}\,dt\}^{\frac{r-p}{r}},$$

となる. そして仮定 $r > q = p/(p-1)$ より, $p(r-2)/(r-p) > 1$ となり, 最後の積分は収束する. 一方 $e^{-\lambda\sigma} F(\lambda)$ の Fourier 変換が

$$\frac{f(\sigma+it)}{\sigma+it}$$

となることより, Young-Hausdorff の定理から

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda\sigma q}\,|F(\lambda)|^q\,d\lambda < \infty$$

を得る. これより

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sigma q \log(n+1)}\,|F(\log n)|^q\,\{\log(n+1) - \log n\} < \infty$$

となり, この級数の項が 0 に収束することから,

$$|F(\log n)|^q = 0(n^{\sigma+1/q})$$

となることが分かる. (**終わり**.)

Dirichlet 級数の積の性質から $Z_u(x) \in H^r(\sigma_P), r \geq 1$, となることが簡単に示されるから, Fubini の定理を用い, 定理 3.2 の結論に加えて次が成立する.

命題 3.4. 定理 3.2 の仮定の下で, (3.4) の Dirichlet 級数は $\sigma > 1/2$ の各点で収束する.

定理 3.2 と命題 3.4 で除外されるおのおのの測度零の不変集合の関係は分からない. そして (3.2) の $\sigma > 1/2$ での収束と Riemann 予想が同値という Littlewood の定理 [10; 14.25] と見比べると命題 3.4 は少しは面白いかもしれない. また定理 3.2 の結論をみたす点は $\mathbf{T}^\omega$ の中で稠密となる. そこでそのような $x_n \to 0$ となる点を定め (3.4) による関数列 $f_n(s)$ を考え $n \to \infty$ での状況を調べると $H^q(dt/\pi(1+t^2))$ でのノルムは発散してしまい $\zeta(s)$ との関係は途切れてしまう.

追記. 最近, 松本耕二氏 (名大多元数理) より上記の内容について, いくつかのコメントを頂いた.

(1) ここで扱った概周期関数の拡張と類似の議論が, ゼータ関数の確率論的な値分布論にでてくること.

(2) 定理 3.2 に関しては, Euler 積 そのものが, 直接 $\sigma > 1/2$ まで解析的に拡張できること.

(3) このようなゼータ関数の値分布論は, 特に 旧ソ連, 東欧圏で盛んで, 次の本が参考になるだろうこと :

A. Laurinčikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function,* Kluwer, 1996.

紙面をお借りし松本氏に謝辞を表したい.

文献

1. H. Bercovici and C. Foias, *A real variable restatement of Riemann's hypothesis,* Israel J. Math. 48, 1984, 57-68.

2. A. Beurling, *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space,* Acta Math. 81, 1949, 239-255.

3. A. Beurling, *A closure problem related to the Riemann Zeta-function,* Proc. Acad. Sci. U.S.A. 41, 1955, 312-314.

4. P. Halmos, *Lectures on ergodic theory,* 日本数学会, 1956.

5. H. Helson, *Convergent Dirichlet series,* Ark. För Mat. 4, (1962), 501-510.

6. H. Helson, *Compact groups and Dirichlet series,* Ark. För Mat. 8, (1969), 139-143.

7. 鹿野　健　他, リーマン予想, 日本評論社, 1991.

8. N. Nikolski, *Distance formulae and invariant subspaces, with an application to localization of zeros of the Riemann ζ-function,* Ann. Inst. Fourier, Grenoble 45, 1995, 143-159.

9. E.C. Titchmarsh, *The theory of functions,* 2nd ed. Oxford UP, 1939.

10. E.C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function,* (revised by D. R. Heath-Brown), Oxford UP, 1988.